República Bolivariana de Venezuela

Ministerio del Poder Popular de Educación

Universidad José Antonio Páez

Álgebra Lineal Numérica

Integrantes:

Andrés Gutiérrez C.I.: 30.662.790

**Introducción**

El álgebra lineal numérica es una rama de las matemáticas que se enfoca en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y la resolución de problemas a través de la manipulación de vectores y matrices. Esta disciplina tiene una amplia variedad de aplicaciones en diversas áreas, como la física, la ingeniería, la informática y muchas otras. En este trabajo, exploraremos algunos de los conceptos fundamentales del álgebra lineal numérica, como la norma vectorial y matricial, el número de condición, los autovalores y autovectores, y los algoritmos del método de potencia y del método de potencia simétrico e inverso. A través de la comprensión y aplicación de estos conceptos, podremos resolver problemas complejos y avanzar en nuestra comprensión de las matemáticas aplicadas.

**Norma Vectorial y Norma Matricial**

La norma vectorial es una medida de la magnitud de un vector en un espacio vectorial. Formalmente, la norma vectorial de un vector x se define como:

||x|| =

donde x1, x2, ..., xn son las componentes del vector x.

La norma matricial es una medida de la magnitud de una matriz. Hay varias formas de definir la norma matricial, pero una de las más comunes es la norma inducida por la norma vectorial. Formalmente, la norma matricial de una matriz A se define como:

||A|| = max

Donde x es un vector no nulo y ||.|| denota la norma vectorial. Esta definición indica cuánto puede amplificar A la magnitud de un vector.

Las normas matriciales tienen propiedades interesantes, como la desigualdad triangular y la propiedad de submultiplicatividad. Estas propiedades hacen que las normas matriciales sean útiles en el análisis de matrices y sistemas lineales.

**Ejercicios:**

Hallar la norma del vector (3,-2).

Dada la matriz A = calcula su norma de Frobenius.

A =

Se calcula la suma de los cuadrados de todos sus elementos.

Luego sacamos la raíz cuadrada del resultado para obtener la norma de Frobenius.

Por lo tanto, la norma de Frobenius de la matriz A es aproximadamente 5.48.

**Número de Condición**

El número de condición es un concepto fundamental en el álgebra lineal numérica que se utiliza para medir la sensibilidad de una solución a pequeñas variaciones en los datos de entrada. En términos simples, el número de condición de una matriz indica cuánto se amplifica el error relativo en la solución cuando se introduce un pequeño error relativo en los datos de entrada.

Formalmente, el número de condición de una matriz A se define como la norma matricial de A multiplicada por la norma matricial de la inversa de A:

Donde ||.|| denota la norma matricial, que es una medida de la magnitud de una matriz. Un número de condición alto indica que la matriz es mal condicionada, lo que significa que pequeños errores en los datos de entrada pueden resultar en grandes errores en la solución.

El número de condición es importante en muchos problemas numéricos, como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, la interpolación y el ajuste de curvas, entre otros. En general, se prefiere trabajar con matrices bien condicionadas, ya que esto reduce la sensibilidad a errores en los datos y mejora la precisión de la solución.

**Ejercicio:**

Dada la matriz A = calcula su número de condición utilizando la norma matricial infinito.

A =

El número de condición de una matriz se define como el producto de su norma y la norma de su inversa. La norma matricial infinito de una matriz se define como el máximo de las sumas de los valores absolutos de sus filas.

Primero, calculamos la inversa de la matriz A:

Luego, calculamos la norma infinita de ambas matrices:

Finalmente, calculamos el número de condición como el producto de ambas normas:

Por lo tanto, el número de condición de la matriz A utilizando la norma matricial infinito es 21.

**Autovalor y Autovector**

Los autovalores y autovectores son conceptos importantes en el álgebra lineal y se utilizan en una amplia variedad de aplicaciones, incluyendo la física, la ingeniería y la informática.

Un autovector de una matriz A es un vector no nulo x que satisface la ecuación:

Donde λ es un escalar conocido como autovalor. En otras palabras, cuando se multiplica la matriz A por el autovector x, el resultado es un múltiplo del mismo autovector.

Los autovalores y autovectores son útiles para comprender la estructura de una matriz y para resolver sistemas lineales. Por ejemplo, si una matriz tiene un autovector con autovalor cero, entonces la matriz es singular (no invertible). Si todos los autovalores de una matriz son positivos, entonces la matriz es definida positiva y tiene propiedades útiles en el análisis numérico.

**Ejercicio:**

Dada la matriz A = encuentra sus autovalores y autovectores.

Para encontrar los autovalores de una matriz, debemos resolver la ecuación característica det(A -λI) = 0, donde I es la matriz identidad y λ es el autovalor.

Tenemos que:

Resolviendo esta ecuación cuadrática, encontramos que los autovalores de A son λ1 = 1 y λ2 = 3.

Para encontrar los autovectores correspondientes a cada autovalor, debemos resolver el sistema de ecuaciones (A - λI) x = 0, donde x es el autovector.

Para el autovalor λ1 = 1, tenemos que:

Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontramos que el autovector correspondiente al autovalor λ1 es x1 = [-1, 1].

Para el autovalor λ2 = 3, tenemos que:

Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontramos que el autovector correspondiente al autovalor λ2 es x2 = [1, 1].

Por lo tanto, los autovalores de la matriz A son λ1 = 1 y λ2 = 3 y sus autovectores correspondientes son x1 = [-1, 1] y x2 = [1, 1].

**El Método de Potencia**

El método de potencia es un algoritmo utilizado para encontrar el autovalor dominante (el autovalor de mayor magnitud) y su correspondiente autovector de una matriz cuadrada A. El algoritmo comienza con un vector inicial X0 y repite la siguiente operación hasta que se alcanza la convergencia:

1. Multiplicar la matriz A por el vector actual Xn: y = AXn

2. Normalizar el vector resultante: , donde ||y|| es la norma euclidiana de y

Después de varias iteraciones, el vector resultante Xn converge al autovector correspondiente al autovalor dominante. El autovalor dominante puede ser estimado como el cociente entre el producto punto del vector actual y el vector anterior y la norma del vector anterior:

El método de potencia es muy útil para matrices grandes y dispersas, ya que sólo requiere la multiplicación de la matriz por un vector en cada iteración. Sin embargo, el método sólo converge al autovalor dominante y puede ser inestable si hay autovalores cercanos en magnitud. Para superar estas limitaciones, se han desarrollado variantes del método de potencia, como el método de deflación y el método de potencia inversa.

**Ejercicio:**

Dada la matriz A = utiliza el método de potencia para encontrar su autovalor dominante y el autovector correspondiente.

Elegimos como vector inicial x0 = [1, 0] y comenzamos a iterar:

Podemos continuar iterando hasta alcanzar la precisión deseada. En este caso, podemos observar que el autovector converge hacia [1, 1], que es uno de los autovectores de la matriz A.

Para encontrar el autovalor dominante correspondiente a este autovector, podemos utilizar la fórmula:

Utilizando el último vector calculado (x3), tenemos que:

Por lo tanto, el autovalor dominante de la matriz A es λ = 3 y su autovector correspondiente es [1, 1].

**Algoritmo del Método de Potencia Simétrico**

El método de potencia simétrico es una variante del método de potencia que se utiliza específicamente para matrices simétricas. La ventaja de este método es que siempre converge al autovalor dominante y sus correspondientes autovectores.

El algoritmo del método de potencia simétrico es el siguiente:

1. Seleccionar un vector inicial X0

2. Calcular y normalizar el vector

3. Calcular la matriz de proyección

4. Calcular la matriz simétrica

5. Repetir los pasos 2-4 hasta que se alcance la convergencia.

Después de varias iteraciones, el vector resultante xn converge al autovector correspondiente al autovalor dominante de la matriz simétrica A. El autovalor dominante puede ser estimado como el cociente entre el producto punto del vector actual y el vector anterior y la norma del vector anterior:

El método de potencia simétrico es muy eficiente para matrices grandes y simétricas, ya que sólo requiere la multiplicación de la matriz por un vector en cada iteración y la matriz simétrica A' es más fácil de diagonalizar que la matriz original A. Sin embargo, el método puede ser inestable si hay autovalores cercanos en magnitud. En este caso, se pueden utilizar variantes del método de potencia simétrico, como el método de deflación simétrico.

**Ejercicio:**

Dada la matriz A = utiliza el método de potencia simétrico para encontrar su autovalor dominante y el autovector correspondiente.

Elegimos como vector inicial x0 = [1, 0] y comenzamos a iterar:

Podemos continuar iterando hasta alcanzar la precisión deseada. En este caso, podemos observar que el autovector converge hacia [1, 1], que es uno de los autovectores de la matriz A.

Para encontrar el autovalor dominante correspondiente a este autovector, podemos utilizar la fórmula:

Utilizando el último vector calculado (x3), tenemos que:

Por lo tanto, el autovalor dominante de la matriz A es λ = 3 y su autovector correspondiente es [1, 1].

**Algoritmo del Método de Potencia Inverso**

El método de potencia inverso es una variante del método de potencia que se utiliza para encontrar el autovalor más pequeño de una matriz A. En lugar de iterar con la matriz A, se itera con su inversa A-1.

El algoritmo del método de potencia inverso es el siguiente:

1. Seleccionar un vector inicial X0.

2. Calcular y normalizar el vector

3. Calcular el autovalor estimado

4. Repetir los pasos 2-3 hasta que se alcance la convergencia.

Después de varias iteraciones, el vector resultante xn converge al autovector correspondiente al autovalor más pequeño de la matriz A. El autovalor más pequeño puede ser estimado como el cociente entre el producto punto del vector actual y el vector anterior y la norma del vector actual:

El método de potencia inverso es muy eficiente para matrices grandes y dispersas, ya que sólo requiere la multiplicación de la matriz por un vector en cada iteración y la matriz inversa puede ser calculada utilizando técnicas de factorización LU o Cholesky. Sin embargo, el método puede ser inestable si hay autovalores cercanos en magnitud o si la matriz es singular. En estos casos, se pueden utilizar variantes del método de potencia inverso, como el método de deflación inverso o el método de potencia inverso modificado.

**Ejercicio:**

Dada la matriz A = utiliza el método de potencia inverso para encontrar su autovector y autovalor correspondiente.

Calculamos la matriz inversa de A:

Elegimos un vector inicial x0. Por ejemplo, podemos elegir x0 = [1, 1]

Aplicamos la fórmula para calcular el siguiente vector x1, luego x2 y x3

Para calcular el valor propio más pequeño λ, podemos utilizar la fórmula . Sustituyendo el vector propio que encontramos en esta fórmula, obtenemos:

Por lo tanto, el autovalor más pequeño de A es λ = 1

**Conclusiones**

El álgebra lineal numérica es una disciplina fundamental en las matemáticas aplicadas y tiene numerosas aplicaciones en diversas áreas, como la física, la ingeniería o la informática. En este trabajo, se han presentado seis conceptos clave en esta disciplina: la norma vectorial y matricial, el número de condición, los autovalores y autovectores, y los algoritmos del método de potencia y del método de potencia simétrico e inverso.

Cada uno de estos conceptos tiene aplicaciones específicas y es importante comprenderlos para poder aplicarlos de manera efectiva en la resolución de problemas. Además, existen numerosos otros conceptos y herramientas en el álgebra lineal numérica que son igualmente importantes.